Chapitre 1 : L'espace vectoriel

Structure de corps :

K ensemble quelconque, sur K on définit une loi interne + et une loi externe *

- (K, +) structure de groupe

1/ $\forall a, b, c \in K$ $a+(b+c) = (a+b)+c$ associativité

2/ $\forall$ a et $b \in K$ $a+b = b+a$ Commutativité.

3/ $\forall a \in K$, $\exists 0 \in K$ $a+0 = 0+a = a$ 0 élément neutre de loi +

4/ $\forall a \in K$, $\exists a' \in K$ tel que $a+a' = 0$ a' élément symétrique

- (K, *) $a \in K$, $b \in K$ $a * b \in K$

1/ $a, b, c \in K \rightarrow a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ associativité.

2/ $a, b \in K \rightarrow a \times b = b \times a$ Commutativité.

3/ $\forall a \in K$, $\exists 1 \in K \rightarrow a \times 1 = 1 a = a$ 1 élément neutre pour loi *

4/ $\forall a \in K$, $\exists a^{-1} \in K \rightarrow a . a^{-1} = a^{-1} . a = 1$ a^{-1} élément symétrique de a

(K, +, *) a une structure de corps.

Définition d'un espace

De même que pour le corps on va définir une structure d'espace vectoriel ; étant donné K un corps commutatif :

0 élément neutre pour +

1 élément neutre pour *

E est muni de structure d'espace vectoriel sur le corps K si sur E sont définies :

1/ une loi interne + qui confert à E une structure de groupe commutatif (le vecteur $\vec{0}$) élément neutre.

2/ une loi externe * admettant le corps K pour domaine d'opérateurs : à tout couple $(\alpha, \vec{u})$; $\alpha \in K$, $\vec{u} \in E$ elle

associe $\alpha \vec{u} \in E$ de telle sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites quelque soit les éléments $\alpha, \beta \in K$ et $\vec{u}, \vec{V} \in E$.

1/ $\alpha(\vec{u} + \vec{V}) = \alpha\vec{U} + \alpha\vec{V}$. $\forall \alpha \in K$ et $\forall \vec{u}$ et $\vec{V} \in E$.

2/ $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

3/ $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

4/ $1 \times \vec{u} = \vec{u}$

1/ $\vec{u}, \vec{V}, \vec{W} \in E \rightarrow (\vec{u} + \vec{V}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{V} + \vec{w})$ associativité

2/ $\vec{u}, \vec{V} \in E \rightarrow \vec{u} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{u}$

3/ $\forall \vec{U} \in E$; $\exists \vec{0} \rightarrow \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

4/ $\forall \vec{u} \in E$; $\exists \vec{u}'' \rightarrow \vec{u} + \vec{u}'' = \vec{u}'' + \vec{u} = \vec{0}$ $\vec{u}$ est élément symétrique de $\vec{u}$

Les éléments de E sont appellés vecteurs

Les éléments de K sont appellés scalaires.

+ Sur E est appellé addition vectorielle.

× sur K est appellé multiplication d'un scalaire par un vecteur.

Sous espace vectoriel :

Définition :

Soit E un espace vectoriel et F un sous ensemble de E.

Donc $(F \subset E)$ (F inclus dans E)

F est un sous espace vectoriel de E si F est lui même un espace vectoriel pour les lois d'addition et de multiplication par un scalaire définies sur E.

Théorème :

Soit E un EV et F un sous ensemble de E avec $(F \subset E)$.

On dit que F est un SEV de E si et seulement si :

1/ $F \neq \emptyset$

2/ $\forall \vec{u}$ et $\vec{V} \in F \rightarrow \vec{u} + \vec{V} \in F$: F est stable par rapport à l'addition.

3/ $\forall \vec{u} \in F, \forall \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha \vec{u} \in F$: F est stable pour la loi $\times$ par rapport à un scalaire

E un espace vectoriel, F un sous ensemble de E avec ($F \subset E$)

F est un SEV de E si il vérifie les 2 propriétés suivantes :

1/ F est non vide. $F \neq \emptyset$

2/ $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}, \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \in F$.

exemple : montrez que $F = \{(x, y, z) / z = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

1/ $(1, 2, 0) \in F \rightarrow F \neq \emptyset$

2/ $\vec{u} = (x, y, 0) \in F \quad \vec{v} = (x', y', 0) \in F$.

$\vec{u} + \vec{v} = (x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0 + 0) \in F$ stabilité sur +

3/ $\vec{u} = (x, y, 0) \in F, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \vec{u} = \alpha (x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, \alpha 0) \in F$

stabilité sur ×

① + ② + ③ ⇒ F est un SEV de $\mathbb{R}^3$

Combinaisons linéaires : générateurs.

Définition :

1/ Soit $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ une famille de vecteurs d'un EV : E

tout vecteur de la forme $a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \ldots + a_p \vec{u}_p = \sum_{i=1}^{p} a_i \vec{u}_i$

on a les $a_i \in \mathbb{R}$ est appellée Combinaisons linéaires des vecteurs

$\vec{u}_i \ (i = 1, p)$.

2/ L'ensemble de toutes ces Combinaisons linéaires que l'on désigne par $vect(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est appellée sous espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}_i \ (i = 1, p)$

Proposition :

E un EV on dit que les $\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_p$ engendrent E et que les vecteurs $(\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_p)$ est une famille génératrice si : $E = vect(\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_p)$

exemple : montrez que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = (1,0,0) \\ \vec{e}_2 = (0,1,0) \\ \vec{e}_3 = (0,0,1) \end{cases} \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \exists a_1, a_2, a_3 \quad x = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

$$\vec{x} = (x, y, z) \ \exists\, a_1, a_2, a_3.$$

$$(x, y, z) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

$$(x, y, z) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$$

$$(x, y, z) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3).$$

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\begin{cases} a_1 = x \\ a_2 = y \\ a_3 = z \end{cases}$$

$$(2, 3, 4) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 4(0,0,1).$$
$$= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

Dépendance et indépendance linéaire :

famille libre - famille lié :

Definition 1 :

Soit une famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_p)$ de vecteur d'un espace vectoriel E. On dit que cette famille est <u>libre</u> si et seulement si $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2 + \dots + \lambda_p u_p = 0$ ceci implique automatiquement $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_p = 0$ on dit alors que les vecteurs $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_p$ sont linéairement indépendant.

Définition 2 :

une famille qui n'est pas libre est dite lié et les vecteurs $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p$ sont linéairement dépendants ou <u>liés</u>

Combinaison linéaire et dépendance linéaire :

proposition :

une famille $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p$ est lié si et seulement si l'un au moins des vecteurs s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille

$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ sont liés $\Rightarrow V_1 = aV_2 + bV_3$

ex : $\lambda_1 \vec{U}_1 + \lambda_2 \vec{U}_2 + \lambda_3 \vec{U}_3 + \dots \lambda_p \vec{U}_p = 0.$

$\lambda_1 \neq 0 \qquad \lambda_1 \vec{U}_1 = -\lambda_2 \vec{U}_2 - \lambda_3 \vec{U}_3 - \dots \lambda_p \vec{U}_p.$

$$\vec{U}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{U}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{U}_3 - \dots \frac{\lambda_p}{\lambda_1} \vec{U}_p$$

$$\vec{u}_1 = a_1 \times \vec{u}_2 + a_3 \vec{U}_3 + \dots a_p \vec{u}_p$$

Somme et Somme directe de SEV :

Somme de 2 SEV : Soit F et G deux SEV de EV : E

La somme de F et G qui s'écrit F + G est l'ensemble constitué de toutes les sommes $\vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$

$$F + G = \{\vec{u} + \vec{v} \,/\, \vec{u} \in F \text{ et } \vec{v} \in G\}$$

Théorème :

1/ La Somme de deux sous espaces vectoriels d'un EV : E et aussi un sous espace vectoriel de E

F SEV de E
G SEV de E | F + G est aussi un SEV de E

$\vec{0} \in F$
$\vec{0} \in G$ $\Rightarrow \vec{0} + \vec{0} \in F + G$.

$\vec{0} \in F + G$

Stabilité par rapport à l'addition (+) :

$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_1 + \vec{V}_1 \in F + G \\ \vec{U}_2 + \vec{V}_2 \in F + G \end{array}\right\} \Rightarrow (\vec{u}_1 + \vec{V}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{V}_2) \in F + G$

$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$

$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \in F + G \Rightarrow (\vec{u}_1 + \vec{V}_1) + (\vec{u}_2 + V_2) \in F+G$

multiplication :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}+\vec{v} \in F+G \\ \lambda \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda(\vec{u}+\vec{v}) \in F+G \ ?$$

$$\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} \quad \in F+G.$$

$$\lambda\vec{u} \in F \quad / \quad \lambda\vec{v} \in G.$$

Pros 2/ Soit F et G deux SEV de dimensions finis de E. alors F+G est de dimensions finis

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Considérons $\mathbb{R}^3$ EV / F : SEV

$$F = \{(x;y;z) / z=0\}$$

$$G = \{(x,y,z) / x=0\}$$

(dim ⇒ nombre de vecteur)

Somme directe de 2 SEV.

Espace vectoriel E est dit somme directe des SEV F et G et on note que $E = F \oplus G$ si chaque vecteur x appartenant à E s'écrit de manière unique sous la forme : $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$

Théorème :

l'EV E est la somme des 2 EV F et G si et seulement si

$E = F + G$ et ~~F intégré G~~ $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Propriétés :

Soit F et G deux SEV de E, la somme de F et G est directe si et seulement si $x \in F+G$ il existe un unique couple $(\vec{u}+\vec{v}) \in F \times G$

Définition :

- Soit E un espace vectoriel F et G 2 SEV, F et G sont dis supplémentaire à E quand leur somme est directe et égale à E $F \oplus G = E$

- Soit F et G 2 SEV de E F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = F + G$ et si $F \cap G = \{\vec{0}\}$

F' et G' $\Rightarrow$ $F' = \{(x, y, z) / z = 0\}$ $G' = \{(x, y, z) / x = y = 0\}$

F' et G' sont supplémentaires dans E. ($\mathbb{R}^3$)

* $\mathbb{R}^3 = F' + G'$ aussi $F' \cap G' = \{\vec{0}\}$.

Calcul Matriciel :

Tableau de (n lignes, m colones) $A(n, m)$

$$A = i \begin{pmatrix} a_{n_1} & \overset{j}{a_{n_2}} & a_{n_3} \\ a_{n_4} & a_{n_5} & a_{n_6} \\ a_{n_7} & a_{n_8} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

→ Addition des matrices

→ Multiplication par un nombre

→ " des matrices

→ Le matrices carrés d'ordre n (n ligne, n colone)

↳ matrice carré diagonale (si $\diagdown = 1$ et le reste $= 0$ on note matrice identité I

Ch : L'applicat° Linéaire.

On dit que f est injective si 2 éléments distinctes de E ont des images distincte de F. ⇒ ① injection

f injective $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

f injective $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

② Surjection

on dit que f est surjective si toute élément y de F est l'image d'aumoins un élément x de E !

f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F ; \exists x \in E , y = f(x)$

③ Bijection = injection + surjection.

Soit A un SE de E on appelle l'image de A par f le SE de f(A) de F definis par

$$f(A) = \{ y \in F ; \ y = f(x) \text{ avec } x \in A \}$$

Application linéaire : Soient E et F deux EV sur K et soit f une application de E dans F ; f est une applicat° linéaire si et seulement si $x_1, x_2, x_3 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$

① $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

② $f(\lambda_1 x_1) = \lambda f(x_1)$

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

et si on fait $\lambda_i = 0$ on obtient : $f(O_E) = O_F$

Théorème :

Pour qu'une applicat° f soit linéaire il faut que $f(O_E) = O_F$

L'image par une applicat° linéaire d'un système lié de E est un système lié de F.

Supposons le système $\{X_i \in E \quad i = 1, n\}$ est lié

donc ∃ des α_i sont tous nuls tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha X_i = 0 \quad \text{donc} \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = f(O_E)$$

Comme f est linéaire $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(X_i) = O_F$

$$f(O_E) = O_F.$$

⟹ Pour déterminer une application linéaire f il suffit de connaître les images par f des vecteurs d'une base quelconque de l'espace de départ

$$R^2 = \begin{cases} e_1 = (1,0) \\ e_2 = (0,1) \end{cases} \Big/ \ (x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

$$(x, y) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$$

$$(x, y) = a(1,0) + b(0,1).$$

$$(x, y) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

Donc $(x, y) = (a, b)$

ex $(2,3) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$= 2(1,0) + 3(0,1)$

$= (2,0) + (0,3)$

$= (2,3).$

Soit $\{x_i \quad i=1 \ldots, x\}$ une base de E.

$\forall X \in E \quad X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \qquad f(X) = f(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i)$

$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)$

De cette propriété on peut déduire la notion de rang d'une application linéaire. En effet les $f(x_i)$ font un système générateur de $f(E)$.

$f(X) \in f(E) \qquad$ CL des $f(x_i)$

$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)$.

Donc $f(E)$ est un sous espace vectoriel de l'EV F et sa dimension est égal au rang de son système générateur $[f(x_i)]$

Alors $\dim f(E) = \text{rang}\{f(x_i) \quad i=1 \ldots m\}$.

$\{x_i \quad i=1 \ldots n\}$ base de E

Définition :

On appelle rang d'une applicat° linéaire f c'est la dimension de $f(E)$ $[f(E) \subset F]$ $\quad \text{rang } f \leq \dim f(E) \leq \dim F$

Si f est surjective $\quad f(E) = F \quad \Rightarrow$ le rang de $f = \dim F$

Théorème :

Si l'image de f de tout système libre de E est un système libre de F

Démonstration :

$f(0_E) = 0_F \qquad S = \{x_i \quad i=1, n\}$

Système libre $\Rightarrow \sum \lambda_i x_i = 0 \rightarrow 0_E$

λ_i nuls

Donc $f(\sum \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0_F$

Si f est injective ⇒ rang f = dim E

→ Noyau d'une applicat° linéaire : Ker f

* Définition : On appelle noyau d'une applicat° f l'ensemble des élément de l'espace de départ E dont l'image est :

0_F ; Ce noyau est noté Ker f

$$\text{Ker } f = \{ X \in E,\ f(x) = 0_F \}$$

Ker f est un sous-espace vectoriel de E ?

* Rappel d'un sous-espace vectoriel :

EV ⇒ A B est SEV de A

deux propriétés doivent être vérifiées

- $x_1, x_2 \in B$ → $x_1 + x_2 \in B$
- $\lambda \in K$ (scalaire), $x \in B$ → $\lambda x \in B$

$X, Y \in \text{Ker } f$ → $X + Y \in \text{Ker } f$

$\lambda \in \mathbb{R}$ → $\lambda X \in \text{Ker } f$

$\lambda X + \mu Y \in \text{Ker } f$

$X \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = 0_F$

$Y \in \text{Ker } f \Rightarrow f(y) = 0_F$

$$f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y)$$

$$f(\lambda X + \mu Y) = 0_F + 0_F = 0_F$$

$$\lambda X + \mu Y \in \text{Ker } f$$

⇒ Ker f est un SEV de E

Théorème :

$$f \text{ injective} \iff \text{Ker } f = \{0_E\}$$

Représentat° matricielle d'une application linéaire :

Matrice associée à une applicat° linéaire :

Soit un Espace E avec $\dim E = n$ et soit F avec $\dim F = m$

$\mathcal{E}$: Soit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n\}$ une base de E ⇒ vecteurs

$\mathcal{F}$: et aussi $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2 \dots \vec{f}_m\}$ une base de F. "

$f : E \longrightarrow F$

Soit x un vecteur de E $(x \in E)$.

[Avec une base on peut écrire uniquement une Combinaison linéaire]

$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i$ ($\vec{e}_i$ forme base de E)

$f(X)$? ⇒ $f(X) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\vec{e}_i)$?

Il suffit de connaître les $f(\vec{e}_i)$ de F. Pour déterminer l'image par F d'un vecteur quelconque X de E

La connaissance des n vecteurs $f(\vec{e}_i)$ par leurs m coordonnés dont la base $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots \vec{f}_m\}$ détermine entièrement l'applicat° linéaire f

On associe à f une matrice dont les colonnes sont formées par les coordonnés des vecteurs $f(\vec{e}_i)$

E : $\dim E = n$ F : $\dim F = m$

$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n\} = \{e_i \quad i = 1 \dots n\}$

$\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2 \dots \vec{f}_m\} = \{f_j \quad j = 1 \dots m\}$

$f(e_i) = \{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2) \dots f(\vec{e}_n)\}$ Dans la base $\{\vec{f}_i\}$

$M(f) = f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2) \dots f(e_n)$

$$M(f) = \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{matrix} \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ x_1 & & \\ x_2 & & \\ \vdots & & \\ x_m & & \end{pmatrix}$$

$f(\vec{e}_1) \in F \iff f(\vec{e}_1) = \sum_{j=1}^{m} x_j f_j$

$M_f = (m, n)$ Si $m = n$ la matrice est carée

$M(f) = (m, n)$
le nombre de colone = dim E
" de ligne = dim F
} remarque (1)

remarque (2)

M(f) dépend de l'expression f et des bases choisies (elle change en fonct° des bases choisies)

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3 : (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
$\mathbb{R}^2 : (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$\mathbb{R}^3 \begin{cases} \vec{e}_1 = (1, 0, 0) \\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0) \\ \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$

$\mathbb{R}^2 \begin{cases} \vec{e}_1 = (1, 0) \\ \vec{e}_2 = (0, 1) \end{cases}$

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$
$(x, y, z) \longmapsto (3x + y + z, x - y + 2z)$

$f(x, y, z) = (3x + y + z, x - y + 2z)$

$[f(x + y) = f(X) + f(Y)]$

$M_f = \begin{matrix} & f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \\ \vec{e}_1 & 3 & 1 & 1 \\ \vec{e}_2 & 1 & -1 & 2 \end{matrix}$

$f(\vec{e}_1) = f(1, 0, 0) = (3, 1) = (3\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$
$f(\vec{e}_2) = f(0, 1, 0) = (1, -1) = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$
$f(\vec{e}_3) = f(0, 0, 1) = (1, 2) = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)$

$(3, 1) = 3(1, 0) + 1(0, 1)$
$= (3, 0) + (0, 1) = (3, 1)$

Si

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{M_f} \mathbb{R}_2$
$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 1,0,0 \\ 0,1,0 \\ 0,0,1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{pmatrix} \qquad Mf\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,0,0 \\ 0,1,0 \\ 0,0,1 \end{pmatrix} \longrightarrow \overset{\mathbb{R}^2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$(3,1) = a_1(1,1) + a_2(0,1)$$

$$(3,1) = (a_1, a_1) + (0, a_2)$$

$$(3,1) = (a_1, (a_1 + a_2))$$

$$Mf\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$a_1 = 3$

$a_1 + a_2 = 1 \Leftrightarrow a_2 = 1 - a_1$
$= 1 - 3$
$= -2$

Opération sur les matrices:

- Soit f et g deux A.L ; soit A.L $f+g$.

$\forall x \in E \ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$M(f) ; M(g)$ $\qquad$ $M(f+g) = M(f) + M(g)$

$M(f)$ et $M(g)$

$M(f)(3,2)$

$M(g)(3,2)$

Multiplication par un scalaire :

$f \longrightarrow M(f)$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ $\qquad$ $M(\lambda f) = \lambda \times M(f)$

$$Mf = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad Mg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f+g)\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$M_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = 2$

$M_{\lambda f} = \lambda \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$M(2f) = 2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

Produit de deux matrices :

on définie le produit de 2 matrices à partir de la composition de 2 AL.

$f : E \longrightarrow F$

$g : F \longrightarrow G$

$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ ($g \circ f$)

M_f $f \to M$

M_g $g \to N$

E . F . G étant des Espaces menies d'une base quelconque On associe à f sa matrice associé M et g sa matrice associé N. Par définition le p^t NM sera la matrice associée à l'application ($g \circ f$)

Alors NM qui est la

$f : E \longrightarrow F$ $\dim E = n$, $\dim F = m$

$M_f = (f(1)$

$M_f = (m, n)$

$M_f = (\dim E, \dim F)$

exercice :

Soit f une Application $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x, y, z) = (2x + y, y + z)$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : g(x, y) = (x + y, x + 2y)$

1) Determiner l'applicat° ($g \circ f$) et donner sa matrice associée $M(g \circ f)$

2/ Montrer que $M_g \times M_f = M(g\circ f)$

① $f(x,y,z) = (\overset{X}{2x+y}, \overset{Y}{y+z}) = g$

$$\begin{cases} e_1 = (1,0,0) \\ e_2 = (0,1,0) \\ e_3 = (0,0,1) \end{cases}$$

$g(X,Y) = (2x+y+y+z,\ 2x+y+2y+2z)$

$(g\circ f)(x,y,z) = (2x+2y+z,\ 2x+3y+2z)$

$$\left.\begin{cases} (g\circ f)(1,0,0) = 2,2 \\ (g\circ f)(0,1,0) = 2,3 \\ (g\circ f)(0,0,1) = 1,2 \end{cases}\right\} \quad M_{(g\circ f)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(colonnes : $f\circ g(e_1)$, $f\circ g(e_2)$, $f\circ g(e_3)$)

②

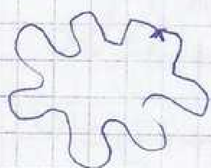
$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$g(1,0) = (1,1)$

$f(0,1) = (1,2)$

$M_g \times M_f = M_{(g\circ f)}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ex Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y,z) = (x+y+z,\ 2x-y-z)$

1/ Donnez M_f : $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ munis de 2 bases

2/ Montrez que les vecteurs

$$\left.\begin{array}{l} u = (1,0,1) \\ v = (-1,-1,0) \\ w = (-1,2,1) \end{array}\right) \text{ forment une base } \mathbb{R}^3$$

3/ Donnez M_f : $\mathbb{R}^3$ muni de base (u,v,w) et $\mathbb{R}^2$ muni de base

Ex

Soit une Applicat° $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (-x+y+z \,,\, -6x+4y+2z \,,\, 3x-y+z)$$

1) Donnez M_f : $\mathbb{R}^3$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) Donnez une base et dimension de Ker f (noyau de f)

1) $f(1,0,0) = (-1,-6,3)$

$f(0,1,0) = (1,4,-1)$

$f(0,0,1) = (1,2,1)$

$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ (colonnes v_1, v_2, v_3)

2) $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, f(x,y,z) = \vec{0}\}$

$f(x,y,z) = (-x+y+z \,;\, -6x+4y+2z \,;\, 3x-y+z) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ -6x+4y+2z=0 \\ 3x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ -6x+4y+z=0 \\ 2(3x-y+z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ -6x+4y+z=0 \\ 2y+4z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x-6y-6z=0 \\ -6x+4y+2z=0 \\ 2y+4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-6y-6z=0 \\ -2y-4z=0 \\ 2y+4z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y-z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y+z \\ -2y+z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-z \\ y=2z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim f\mathbb{R}^3 + \dim \ker f$

$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim f\mathbb{R}^3$

$\Downarrow$

(Mf)

$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0$

$V_3 = \alpha V_1 + \alpha'' V_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ +3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_3 = V_1 + 2V_2$ $\qquad V_3 \qquad V_1 + 2V_2$

Ex

Soit f une A.L de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2x - y - z)$.

1/ Donner Mf

2/ Montrez que les vecteurs $U_1 = (1, 0, 1)$ $U_2(-1, -1, 0)$ $W_3(1, 2, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3/ Donner la Matrice $Mf = (\mathbb{R}_3$ muni de la base $(U, V, W))$

4/ Donnez Mf ($\mathbb{R}_3$ muni de la base $(+U, V, W)$ et $\mathbb{R}_2 = ((1, 1), (1, 0))$)

1/ $f(1) = f(1, 0, 0) = (1, 2)$

$f(2) = f(0, 1, 0) = (1, -1)$ $\Rightarrow Mf \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$f(3) = f(0, 0, 1) = (1, -1)$

2/ (U, V, W) forment une base de $\mathbb{R}$ $\quad \alpha U + \beta V + \gamma W = 0$

$\alpha(1, 0, 1) + \beta(-1, -1, 0) + \gamma(1, 2, 1) = 0$

$(\alpha, 0, \alpha) + (-\beta, -\beta, 0) + (\gamma, 2\gamma, \gamma) = 0$

$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \alpha = \beta - \gamma \\ \alpha = -\gamma \end{cases}$ $\qquad \beta = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - \gamma \\ \beta = -2\gamma \\ \alpha = -\gamma \end{cases}$

③ ① + ③ = 0 = β

$\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$f(1,0,1) = (2,1)$$
$$f(-1,-1,0) = (-2,1)$$
$$f(1,2,1) = (4,-1)$$

$$M_{f(u,v,w)} = \begin{pmatrix} & f(u) & f(v) & f(w) \\ e_1 & 2 & -2 & 4 \\ e_2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4/

$f(u) = (2,1) = 2e_1 + e_2$

$f(v) = (-2,1) = -2e_1 + e_2$

$f(w) = (4,-1) = 4e_1 - e_2$

$e_1 = (1,0)$

$e_2 = (0,1)$

$$\begin{pmatrix} & f(u) & f(v) & f(w) \\ e_1 & 2 & -2 & 4 \\ e_2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3(u,v,w)$ $\mathbb{R}^2(e_1,e_2)$

$\mathbb{R}^3(u,v,w)$ $\mathbb{R}^2(e'_1,e'_2)$

$e'_1 = (1,1)$

$e'_2 = (1,0)$

→ $f(u) = (2,1) = a(1,1) + b(1,0) = (2,1) = (a,a) + (b,0)$

$f(v) = (-2,1) = a'(1,1) + b'(1,0) = (-2,1) = (a',a') + (b',0)$

$f(w) = (4,-1) = a''(1,1) + b''(1,0) = (4,-1) = (a'',a'') + (b'',0)$

$(a+b, a) = (1,1)$

$(a'+b', a') = (+1, -3)$

$(a'', b'', b'') = (+5, 1)$

$$M_{f\,(u,v,w)(e_1,e_2)} \begin{pmatrix} 1 & +1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex

Soit l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = (2x+3y \,;\, y+2z)$$

1/ f est-elle linéaire ?

2/ Determiner le noyau de f (Ker f) et son rang.

1/ $f(\vec{0}) = 0$

$f(0,0,0) = (0,0)$ $\qquad f(X+Y) = f(X) + f(Y)$.

X et $Y \in \mathbb{R}^3$ $\qquad f(x+x_1, y+y_1, z+z_1) = [2(x+x_1) + 3(y+y_1) ; (y+y_1) + 2(z+z_1)]$.

$X = (x,y,z)$ $\qquad \Rightarrow [2x+2x_1+3y+3y_1 ; y+y_1+2z+2z_1]$

$Y = (x_1,y_1,z_1)$ $\qquad \Rightarrow (2x+3y)+(2x_1+3y_1) ; (y+2z)+(y_1+2z_1)$

$X+Y = (x,y,z)+(x_1,y_1,z_1)$ $\qquad \Rightarrow (2x+3y, y+2z) + (2x_1+3y_1, y_1+2z_1)$.

$X+Y = (x+x_1, y+y_1 ; z+z_1)$

$$f(X+Y) = f(X) + f(Y).$$

2/ $X \in \mathbb{R}^3$. $\quad X = (x,y,z)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda X) = \lambda f(X)$.

$$f(\lambda X) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$
$$= (2\lambda x + 3\lambda y, \lambda y + 2\lambda z).$$
$$= \lambda(2x+3y), \lambda(y+2z).$$
$$= \lambda(2x+3y, y+2z). \Rightarrow \lambda f(x)$$

$\mathrm{Ker} f = \{ X(x,y,z) ; f(x,y,z) = 0 \}$.

$f(x,y,z) = (2x+3y ; y+2z) = (0,0)$

$\begin{cases} 2x+3y = 0 \\ y+2z = 0 \end{cases}$ $\quad 2x+3(-2z) = 0$ $\quad x = 3z$

$2x - 6z = 0$

$2x = 6z$ $\quad \Rightarrow$

$$x + y - z = 0$$
$$x = z - y$$
$$X = \begin{pmatrix} z-y \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$
$$y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 3z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \operatorname{Ker} f = 1$

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rang} f$

$\operatorname{rang} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f$

$\operatorname{rang} f = 3 - 1$

$\operatorname{rang} f = 2$

① Calculez M_f — $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ bases canoniques respectives

② Calculez M_f — $\mathbb{R}^3$ base canonique, $\mathbb{R}^2$ $((1,1),(0,1))$

$$M_f \begin{pmatrix} & f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ e_1 & 2 & 3 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$e_1 = (1,0)$
$e_2 = (0,1)$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (2,0) = a(1,1) + b(0,1)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (3,1)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,2)$

$(2,0) = (a,a) + (0,b)$

$(2,0) = (a, a+b)$ — $a = 2$, $a+b = 0$, $-a = +b$, $-2 = b$

$(3,1) = (a, a+b)$ — $a = 3$, $a+b = 1$, $b = 1 - a$, $b = -2$

$(0,2) = (a, a+b)$ — $a = 0$, $a+b = 2$, $b = 2$

$$M_f \begin{pmatrix} & f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ e'_1 & 2 & 3 & 0 \\ e'_2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$e'_1 = (1, 1)$
$e'_2 = (0, 1)$.

Ex

Soit $S = \{(1, 2, 1) ; (1, 1, 1) ; (2, 3, 2)\}$

S engendre-t-il $\mathbb{R}^3$?

$X = (x, y, z)$

$X = au + bv + cw$.

$(x, y, z) = a(1, 2, 1) ; b(1, 1, 1) ; c(2, 3, 2)$

$x = a + b + 2c$
$y = 2a + b + 3c$.
$z = a + b + 2c$

$x = a + b + 2c$

$y - 2x = -b - c$

$z - x = 0 \Rightarrow z = x$.

$X = (x, y, x)$